Exercice 1 ***(6 points)***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$.

1. *On calcule $f(-1)$: :*$f(-1) = (-1)^3 - 4 * (-1)^2 - 3 * (-1) + 2 = 0$
   Donc -1 est une racine de f.
2. *On développe $(x+1)(ax^2+bx+c)$:*
   $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$
   $= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$.
   Par IDENTIFICATION des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b+a & = -4 \\ c+b & = -3 \\ c & = 2 \end{cases}$$

   On a donc : $\boxed{a = 1 \qquad b = -4 - 1 = -5 \qquad c = 2}$.

   Conclusion :

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 2)}$$

3. *On suppose que $a = 1$, $b = -5$ et $c = 2$.*
   (a) *Racines de f : on résout l'équation $f(x) = 0$.*
   $(x+1)(x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \qquad x^2 - 5x + 2 = 0$

   $x + 1 = 0 \qquad x = -1$

   $x^2 - 5x + 2 = 0$ *:* $\Delta = b^2 - 4 * a * c = 17$. *L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes car* $\Delta > 0$.

$$\boxed{S = \left\{ \frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2} \right\}}$$

   Les racines de f sont : $-1 \qquad \frac{5+\sqrt{17}}{2} \qquad \frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

(b) *On cosntruit le tableau de signe de* $\dfrac{x^3-4x^2-3x+2}{x-3}$:

Valeur interdite pour $x-3=0$ *soit* $x=3$

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$		3		$\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+2		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Q		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\dfrac{x^3-4x^2-3x+2}{x-3}>0$ *(signe "strictement" positif) :*

$$\boxed{S=]-\infty;-1[\cup]\frac{5-\sqrt{17}}{2};3[\cup]\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty[}$$

Exercice 2 ***(5 points)***

1. *x et y sont les racines du polynôme X^2-SX+P ($S=-8$, $P=4$) soit X^2+8X+4.*
   $\Delta=b^2-4*a*c=8^2-4*1*4=48$
   L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes car $\Delta>0$.
   $S=\left\{\dfrac{-8+\sqrt{48}}{2};\dfrac{-8-\sqrt{48}}{2}\right\}$ $\quad\boxed{S=\left\{-4+2\sqrt{3};-4-2\sqrt{3}\right\}}$
   Les couples solutions sont : $\boxed{(-4+2\sqrt{3};-4-2\sqrt{3})\qquad(-4-2\sqrt{3};-4+2\sqrt{3})}$

2. $\sqrt{x-3}=x+1$. *Cela implique que :*

   $(\sqrt{x-3})^2=(x+1)^2\Leftrightarrow x-3=x^2+2x+1\Leftrightarrow -x^2-x-4=0$
   $\Delta=b^2-4*a*c=-15$
   $\Delta<0$ *donc l'équation n'admet aucune solution réelle :* $\boxed{S=\varnothing}$

Exercice 3 ***(6 points)***

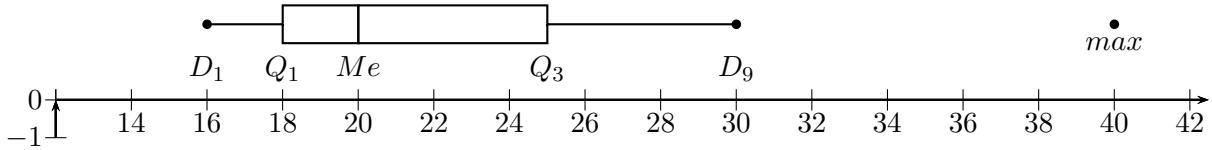
1. *On calcule* 50% *de* 40 *:* $0,50 \times 40 = 20$ *:* Me *est la demi-somme de la* 20^e *valeur et la* 21^e *valeur de la série donc* $Me = \dfrac{20+20}{2} = 20$.

   On calcule 25% *de* 40 *:* $0,25 \times 40 = 10$ *:* Q_1 *est la* 10^e *valeur de la série donc* $Q_1 = 18$.

   On calcule 75% *de* 40 *:* $0,75 \times 40 = 30$ *:* Q_3 *est la* 30^e *valeur de la série donc* $Q_3 = 25$.

   $Q_3 - Q_1 = 25 - 18 = 7$.
2. *On calcule* 10% *de* 40 *:* $0,1 \times 40 = 4$ *:* D_1 *est la* 4^e *valeur de la série donc* $D_1 = 16$.

   On calcule 90% *de* 40 *:* $0,9 \times 40 = 36$ *:* D_9 *est la* 36^e *valeur de la série donc* $D_9 = 30$.



3. $\overline{x} = \dfrac{16 * 6 + ... + 40 * 2}{40} = 22,2$ *milliers d'euros.*
4. *Avec la calulatrice, on trouve* $\sigma \approx 6$.

Exercice 4 ***(3 points)***

1. *On développe selon* x *:*
   $f(x) = n_1(x - x_1)^2 + n_2(x - x_2)^2 = n_1(x^2 - 2x * x_1 + x_1^2) + n_2(x^2 - 2x * x_2 + x_2^2)$
   $f(x) = n_1x^2 - 2x_1n_1 * x + n_1x_1^2 + n_2x^2 - 2x_2n_2 * x + n_2x_2^2$

   On regroupe les termes en x *,* x^2.
   $f(x) = (n_1 + n_2) * x^2 - (2x_1n_1 + 2x_2n_2) * x + n_1x_1^2 + n_2x_2^2$
   $f(x)$ *est de la forme* $ax^2 + bx + c$ *avec* $a = n_1 + n_2$ *(* $a \neq 0$*)* , $b = -(2x_1n_1 + 2x_2n_2)$ *et* $c = n_1x_1^2 + n_2x_2^2$ *donc* f *est une fonction du second degré.*
2. $a = n_1 + n_2$ *donc* $a > 0$ *donc la fonction* f *admet un minimum sur* $\mathbb{R}$.
3. *Le minimum est atteint pour* $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2x_1n_1 + 2x_2n_2}{2(n_1 + n_2)}$ *soit* $x = \dfrac{x_1n_1 + x_2n_2}{n_1 + n_2} = \bar{x}$
   La fonction f *admet un minimum atteint en la moyenne de la série.*